

CAPÍTULO**6****Aplicações da
Integração****Objetivos Deste Capítulo**

1. Estudar alguns tipos de problemas que requerem integração como parte da solução
2. Aprender como formular os problemas em termos de integrais
3. Usar o Maple para realizar integrações

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

`Int(f(x), x);` A forma inerte do comando integral.

`int(f(x), x);` Comando para realizar integração simbólica.

`plot(f(x), x = a .. b);` Plota a expressão $f(x)$, de $x = a$ até $x = b$.

`sin(x)` O seno do ângulo x (x em radianos)

`solve(f(x) = c, x);` resolve a equação para a incógnita x .

`subs(x = c, f(x));` Substitui o valor de c por x na expressão $f(x)$.

`diff(f(x), x);` Tira a derivada de $f(x)$ em relação a x .

`sqrt(x)` Computa a raiz quadrada simbólica da quantidade (ou expressão) x .

`evalf(expr)` Reduz, até onde for possível a expressão $expr$ para a forma numérica.

`simplify(s, symbolic);` Simplifica uma expressão contendo raiz quadrada.

Aplicações Da Integração

A necessidade da integral aparece quando alguém precisa encontrar a área abaixo da curva. Este capítulo ilustra algumas situações comuns nas quais a área abaixo da curva deve ser achada para que um problema possa ser solucionado. A primeira vez que esta necessidade apareceu foi na Física, e vamos repetir a história dando como primeiro exemplo as derivadas de algumas formulas básicas de movimento. Seguiremos com outros exemplos, tirados das disciplinas como eletricidade, geometria, mecânica, hidráulica, economia, ecologia e probabilidade. Até mesmo se você estiver estudando apenas uma delas ou nenhuma, por favor realize cada exemplo. Os métodos ilustrados nos exemplos são quase com certeza aplicáveis em seu campo de estudo.

Você pode achar estranho que este capítulo venha antes das técnicas de integração, visto que alguns dos exemplos deste capítulo contêm integrais que são um tanto difíceis de avaliar. A questão é que o Maple está aí para nosso auxílio e conhece todas as técnicas de integração que serão discutidas no próximo capítulo. É mais interessante ver como as integrais aparecem em várias situações antes de aprender técnicas especiais para a avaliação das próprias. Em casos mais complicado, você pode precisar da ajuda do Maple.

É importante repetir que apesar da integral ser a área abaixo da curva, a área em questão, não terá necessariamente unidades de área. Por exemplo, se estivermos considerando a força sendo exercida em um objeto como uma função de distância, o eixo y mede a força em newtons, e o eixo x mede a distância em metros. A área abaixo da curva força distância tem uma unidade Newton-metro (Nm). Esta é uma unidade de energia, pois um Newton-metro = 1joule ($1\text{Nm} = 1\text{J}$).

Movimento Sob Uma Força Aplicada

Existem várias fórmulas básicas de movimento que podem ser derivadas por integração. Começaremos considerando o movimento de um objeto propulsionado por uma força constante. Imagine Galileu¹ largando uma bala de canhão da torre de Pizza. Considerando que esta tanto pesada quanto aerodinâmica podemos ignorar a resistência do ar durante sua curta trajetória do alto da torre até o chão. A bala de canhão é movida uma força gravitacional constante. Galileu antecipou as leis do movimento de Newton², as quais para os propósitos deste exemplo podem ser afirmadas assim: $F = ma$, e $F = mg$ onde F é a força agindo na bala de canhão, m é massa da bala, g é a constante que representa a aceleração da gravidade, e a é a aceleração da bala. Equacionando ma e mg e cancelando m , achamos a relação extremamente simples $a = g$. Ainda mais, a definição a definição da variação é a razão da variação de velocidade ,

1. Galileu Galilei (1564 – 1642), Astrônomo e matemático italiano.

2. Sir Isaac Newton (1642 – 1727), Matemático e Físico Inglês.

então $a = dv/dt$. Sendo a a derivada, a velocidade tem que se a antiderivada. Em outras palavras, $dv = g dt$, logo $v = \int g dt$.

>v = int(g, y);

$$v = gt$$

Afirmamos que g é uma constante. No sistema métrico, $g \cong 10\text{m/s}^2$ (metros por segundo ao quadrado). Logo, a velocidade é uma função linear de tempo. Nossa análise está correta se fizermos as medidas de tempo no instante em que Galileu larga a bala, e assumirmos que a velocidade inicial era 0m/s . Lembre-se que a antiderivada contém uma constante arbitrária que você precisa determinar pois o Maple não o faz. Neste caso a constante é 0 pois $v = 0$ quando $t = 0$, assim como já foi dito. Veja também que a velocidade é um número positivo. Efetivamente, o que fizemos foi determinar valores positivos a uma direção descendente. Não apenas serão velocidades descendentes positivas como também as distancias. Consequentemente velocidades e distancias ascendentes serão negativas de acordo com a nossa convenção.

Se Galileu tivesse encontrado uma forma de largar a bala para cima, ela já teria uma velocidade no momento em que fosse liberada. A equação do movimento permanece a mesma mas desta vez precisamos digitar a constante arbitrária:

>v = int(g, t) +v[0];

$$v = gt + v_0$$

Digamos que Galileu fosse capaz de dar uma velocidade inicial de -2m/s à bala. A velocidade é negativa pois a bala está numa direção ascendente ao contrário de nossa convenção. Sabendo desta condição inicial, que $v_0 = -2\text{m/s}$ quando $t = 0$, descobrimos que a fórmula para velocidade como uma função de tempo é $v = gt - 2$. Esta equação nos diz que a velocidade é igual a 0 em $t = 0.2\text{s}$. A interpretação é que a bala se move para cima durante um curto período de tempo até que a gravidade reduz esta velocidade a 0 . Após $t = 0.2\text{s}$, a bala de canhão tem uma velocidade positiva, o que significa que ela está se movendo para baixo.

Então pedimos pela distancia que a bala percorre em função do tempo. Visto que a distancia s , em metros está relacionada à velocidade, v , por $v = ds/dt$ a distância é dada pela antiderivada $s = \int v dt$. No caso da velocidade constante, a integral é:

>s = int(v, t);

$$s = vt$$

Esta é a famosa fórmula que afirma que a distância percorrida é o produto da velocidade pelo tempo. É valida desde que a velocidade seja constante.

No caso de Galileu largando a bala de canhão, a velocidade é uma função de tempo; a integral é:

>s = int(v(t), t);

$$s = \int v(t) dt$$

Perceba a diferença nos últimos dois comandos. No primeiro o Maple conclui que v é uma constante, independente do tempo. No ultimo, a velocidade é dada como uma função indeterminada de tempo. Sendo que o Maple não sabe uma fórmula específica para $v(t)$, não pode realizar a integração e simplesmente re-escreve a inserção. Sabemos que no caso da bala de canhão largada de uma torre a velocidade é dada por $v = gt$, então a fórmula integral se torna:

>s = int(g*t, t);

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

Esta também é uma fórmula famosa, que diz que a distância percorrida por um objeto em queda livre, que inicia a trajetória em um ponto estacionário e se move com aceleração constante, é metade de sua aceleração vezes o quadrado do tempo tomado.

Sua vez

Qual a distância percorrida pela bala quando $t = 0$? Resposta: _____

Qual a distância percorrida pela bala quando $t = \sqrt{2}$ s? Resposta: _____

Você pode realizar uma quantidade surpreendente de análises, desde que passe a entender como podem ser aplicadas em variadas situações lidando com aceleração constante. PP6-1 pede para que você desenvolva outras fórmulas bem úteis. Este problema juntamente com PP6-2, ajuda a resolver problemas usando uma mistura de análise gráfica e álgebra. O cálculo integral ajuda a compreender como fórmulas de movimento aparecem de forma natural da compreensão básica de aceleração constante.

Exemplo 6-1

Examine o caso de Galileu largando a bala de canhão mais uma vez. Plote a curva da aceleração, velocidade e distância percorrida como função de tempo no mesmo gráfico(Figura 6.1). Onde as curvas fazem interseção, e existe algum significado nestes pontos de interseção?

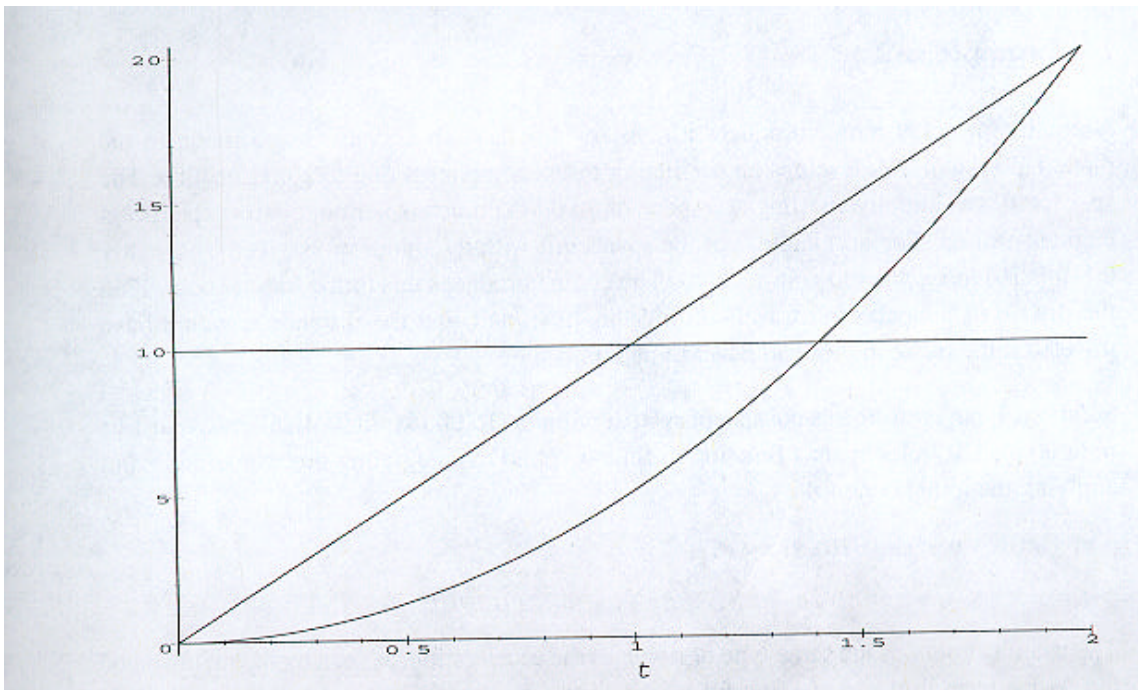


Figura 6.1 Aceleração, velocidade e distância percorrida.

Resolução:

```
>plot({10, 10*t, 5*t^2}, t = 0 .. 2);
```

Você consegue distinguir qual curva é qual? A aceleração é 10, uma constante. Seu gráfico é a linha horizontal. A velocidade é uma função linear, logo a linha curva tem que ser a distância percorrida, que é uma função quadrática de tempo.

A curva de distância intersecciona a linha de velocidade em $t = 2s$, e a linha da aceleração em $t = \sqrt{2} s$. Não há grande significado nestas interseções. A linha de velocidade corta a linha de aceleração em $t = 1s$. O significado deste fato é que neste ponto a velocidade é numericamente igual a aceleração. Basicamente, esta é a definição da aceleração: É a quantidade em que a velocidade muda por segundo.

Sua vez : Qual a distância que o objeto percorre se for submetido a uma aceleração de $33m/s^2$ por 4 segundos? Considerando que a velocidade inicial do objeto é 0.

Resposta: _____

Exemplo 6-2

Normalmente um motor de foguete produz uma aceleração constante. Uma espaçonave numa missão ao sistema planetário TH desenvolve uma componente de aceleração oscilante por conta de um mal funcionamento. A espaçonave estava inicialmente navegando a uma velocidade de 15.000 km por hora antes dos motores do foguete serem ligados. A aceleração da espaçonave com o motor ligado é dada por $a = 8 + 0.5 \sin(t/10) \text{ m/s}^2$, onde t está em segundos. O motor produz esta aceleração por uma hora. Descubra qual a distância que a espaçonave percorre durante este tempo, e a distância que a espaçonave teria percorrido se nunca tivesse ligado os motores.

Resolução: Primeiro converta o sistema de unidades ($15.000 \text{ km/h} = 4.167 \text{ m/s}$, e 1 hora = 3600s). A velocidade como função de tempo é achada integrando a aceleração e aplicando a condição inicial:

```
>v := int(8+0.5*sin(t/10), t)+4167;
```

$$v := 8t - 5 \cos(.1000000000t) + 4167$$

A velocidade é bem semelhante a aceleração. A distância percorrida é encontrada integrando esta expressão:

```
>s = int(v, t = 0 .. 3600);
```

$$s = .6684115205 \cdot 10^8$$

A espaçonave viajou 66.84 milhões de metros, ou 66,840km. Se a espaçonave tivesse simplesmente navegado sem propulsão por uma hora, a distância percorrida teria sido 15000km, considerando que a velocidade não muda a não ser que o motor seja ligado.

Apenas por curiosidade podemos a velocidade final da espaçonave.

```
>Vf := int(8+0.5*sin(t/10), t = 0 .. 3600)+4167;
```

$$Vf := 32973.41846$$

Aqui, Vf representa a velocidade final após o motor do foguete estar ligado por uma hora. Esta velocidade, em metros por segundo, é convertida para aproximadamente 119,000 km/h.

Sua vez. Uma espaçonave com um motor experimental está sendo testada na área de testes espaço sideral 99, longe de qualquer objeto de significativa massa gravitacional. A espaçonave

nave está inicialmente em repouso de acordo com o velocímetro radar Doppler posicionado no laboratório da área de testes. O motor é ligado e a aceleração é medida em $a = 10e^{-t/100}$ m/s² durante o teste, que dura 10 segundos. Quando o motor é desligado imediatamente os retro - propulsores são acionados para diminuir a velocidade da espaçonave. A aceleração criada pelos propulsores é $a = -30/(t+1)$, onde nesta fórmula, $t = 0$ é o momento onde o propulsor foi ligado. Quanto tempo os propulsores tem que ficar ligados para parar a espaçonave? E qual a distância percorrida?

Resposta: $t =$ _____

Resposta: $s =$ _____

Trabalho e Energia

Os físicos dizem que trabalho é uma das varias formas de energia. Um determinado trabalho mecânico deve ser realizado para esticar uma mola. A definição de trabalho mecânico é $W = \int F dx$, onde W é a energia em Joules, F é a força aplicada em Newtons e dx é a distância pela qual a força faz o movimento, em metros. A razão pela qual a integral é parte da definição é que a força pode mudar com a distância ao invés de permanecer constante. No caso de uma mola esticada, esta energia não está perdida, ao contrário, está armazenada como energia potencial. Muitas molas obedecem a lei de Hook, que diz que a força de retorno de uma mola esticada é proporcional ao seu alongamento. A formula é $F = kx$, onde k é a força constante, em Nm, e x é a quantidade que a mola foi esticada quando a força F em Newtons é medida.

Exemplo 6-3

É preciso uma força de 2000N para esticar uma mola de automóvel em 3.65 cm. Quanto trabalho é realizado para esticar esta mola em 10 cm?

Resolução: A força constante, k , é determinada pelos dados. A força de dois newtons estica a mola 3.65 cm, então podemos substituir os valores em $F = kx$ e, depois converter centímetros para metros, e resolvemos k .

```
>solve(2000 = k*3.65e-3, {k});
```

```
{k = 547945.2055}
```

O trabalho realizado é $W = \int F dx$. Logo, formamos o comando

```
>int(547945.2055*x, x = 0 .. 0.1);
```

```
2739.726028
```

Logo, 2740 joules são realizados para esticar a mola em 10 cm. Veja que os limites para x na integração devem ser em metros, não centímetros.

Sua vez: Digamos que o mesma mola tenha sido esticada dois centímetros. Quanto trabalho a mais é necessário se ela for esticada de $x = 2\text{cm}$ para $x = 7\text{cm}$?

Resposta: _____

Eletricidade: Voltagem Através de um Capacitor

Um capacitor é um dispositivo para armazenamento de carga em placas. A voltagem V_c através das placas do capacitor é dada por $V_c = \frac{1}{C} \int i dt$ é a capacitância em farads (F), i é a corrente em amperes (A), e t é o tempo em segundos enquanto a corrente elétrica passa.

Exemplo 6-4

Uma corrente alternada, dada pela fórmula $i(t) = 1.55\sin(377t)$ amperes, carrega um capacitor de $t = 0$ a $t = 3$ milissegundos (ms). Ache a voltagem através do capacitor se o seu valor de capacitância for 10^{-6} F ($1\text{ mF} = 10^{-6}\text{ F}$).

Resolução : Substitua os valores conhecidos na fórmula integral:

$$V[C] = \frac{1}{10^{-6}} \int_0^{3 \times 10^{-3}} 1.55 \sin(377t) dt$$

$$V_c = 236.0953494$$

A voltagem através do capacitor é 236V. Perceba que o único ponto difícil neste problema é a aritmética, que o Maple resolve.

Sua vez: Ache a voltagem através do capacitor quando a corrente esteve passando por 6ms, e depois por 15ms. Compare suas resposta a V_c em 3ms e explique.

Resposta: V_c em 6ms = _____ Resposta: V_c em 15ms = _____

Resposta: Em $t = 15\text{ms}$, V_c é (maior/menor) _____ e em $t = 3\text{ms}$ pois _____

Volumes por Integração

É possível achar um volume de um objeto com uma única integração desde que o objeto tenha um eixo de simetria. Existem dois métodos básicos: o método de discos e o método de camadas cilíndricas. Geralmente um método resulta em uma integral mais simples que a outra.

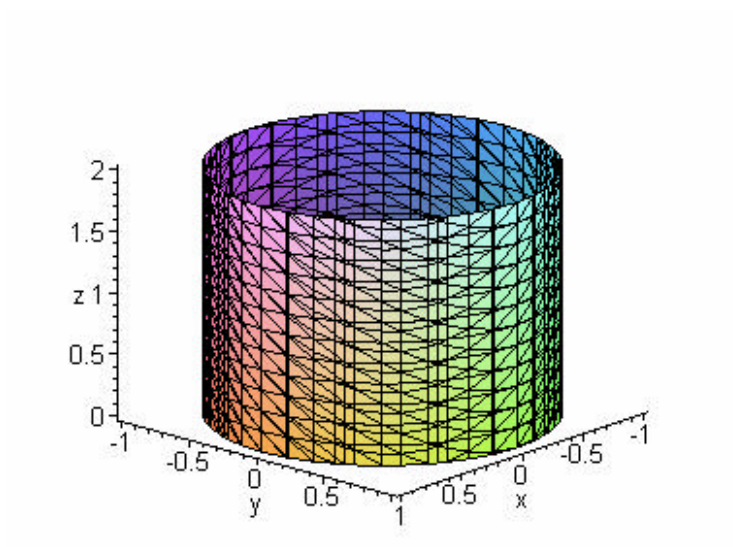


Figura 6.2 Um cilindro de raio 1 e altura 2

Exemplo 6-5

Ache o volume de um cilindro pelo método de discos, e cheque o resultado derivando a fórmula de considerações elementares.

Resolução: Forme um cilindro de raio r escolhendo o círculo $x^2 + y^2 = r^2$, e mova este círculo pelo eixo z , de $z = 0$, a base do cilindro, até $z = h$, o topo do cilindro. A Figura 6.2 mostra um cilindro de raio 1 e de altura 2.

Pegue uma fatia dz paralela ao plano x - y para formar um disco, a área de uma face do disco é πr^2 , e a altura do disco é dz . Logo o volume V , do disco é $dV = \pi r^2 dz$. O volume total do cilindro é achado somando os volumes de todos os discos.

Desde que dz é o diferencial, é necessária a integração. A integral é $V = \int_0^h \pi r^2 dz$.

`>V = int(Pi*r^2, z = 0 .. h);`

$$V = \pi r^2 h$$

Visto que o cilindro é formado por um círculo cujo raio é constante, o volume pode ser deduzido em um passo observando que o volume de um objeto de área cross-sectional constante é achado multiplicando esta área pela altura.

Sua vez: Calcule o volume, em centímetros cúbicos de uma milha de fio de cobre cujo diâmetro incluindo a isolamento, é 0.15 cm.

Resposta: _____

Os problemas mais complicados, logicamente, aparecem quando a área cross-sectional do sólido não é uma constante. O próximo exemplo como usar o calculo integral para derivar a fórmula do volume de um cone.

Exemplo 6-6

O cone tem uma base circular de raio r . A altura do cone é h , derive a fórmula para o volume V .

Resolução: Usaremos o método de discos. Do cone da Figura 6.3, pense em tirar uma pequena fatia cuja espessura seja dz . A fatia é paralela ao plano y - z .

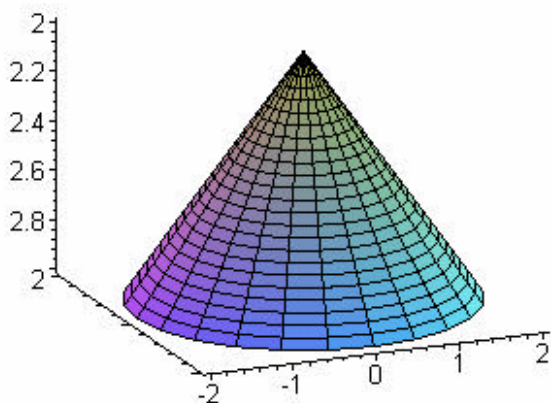


Figura 6.3 Um cone circular com base de diâmetro 4 e altura 2

A fatia forma um fino disco cujo raio depende da altura z , onde a fatia foi tirada. Nosso desafio é construir uma fórmula para este raio. Do diagrama, você pode ver que o cone parece um triângulo quando visto diretamente de um lado, a base do triângulo é $2r$, e esta dimensão diminui linearmente até 0 na altura h . Logo a qualquer altura z , o raio do disco é $r(1-z/h)$, que você pode verificar observando que é uma função linear de z , tendo valores corretos em $z = 0$ e $z = h$. O disco representante tem um volume $dV = \pi(r(1 - z/h))^2 dz$.

Precisamos somar os discos de $z = 0$ até $z = h$, o que significa que a integral que queremos é:

$$V = \int_0^h \pi \left(r \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right)^2 dz$$

>V = int(Pi*(r*(1 - z/h))^2, z = 0 .. h);

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

O volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura.

Sua vez: alguns montes antigos tem aproximadamente a forma de um cone, um deles teve a sua ponta aparada. Este cone pode ser caracterizado por sua altura, h ; seu raio inferior, r_1 e seu raio superior r_2 . Derive a fórmula para o volume do cone Figura 6.4.

Dica: É fácil achar a fórmula para este cone subtraindo o volume que foi cortado do volume de um cone completo, incluindo a parte de cima. A dificuldade aparece na hora de nomear o diagrama, que a altura do cone achatado seja h e a altura do cone completo seja $h + x$.

Relacione x a h , r_1 e r_2 mostrando que $x = \frac{r_2 h}{r_1 - r_2}$. Então realize a seguinte substituição e simplifique o resultado:

>subs(x = r2*h/(r1-r2), 1/3*Pi*r1^2*(h+x) - 1/3*Pi*r^2(x));

Resposta: _____

Exemplo 6-7

Verifique se o volume de uma esfera é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Resolução: Centralize a esfera de raio r na origem. As equações para os pontos na superfície da esfera é $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Usaremos o método dos discos, novamente paralelo ao plano $x-y$. Já que os discos cortam a esfera, eles são círculos de raio $\sqrt{r^2 - z^2}$ desenhe a esfera interseccionando o plano zx . A equação deste círculo é $x^2 + z^2 = r^2$. Logo, a linha

paralela ao eixo x e unindo o eixo z ao círculo na altura z tem o comprimento $\sqrt{r^2 - z^2}$. O volume

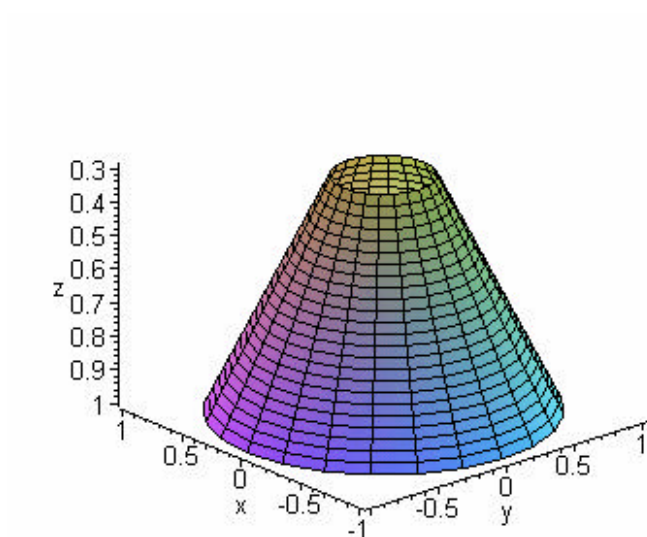


Figura 6.4 Um tronco de cone .

do disco é $dA = \pi(r^2 - z^2)dz$. Estas fatias são tiradas de $z = -r$ at' $r z = +r$. Log, temos a integral

$$>V = \text{int}(\text{Pi}*(r^2 - z^2), z = -r .. r);$$

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

O volume da esfera por integração é $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$, o mesmo resultado que você viu muitas vezes antes.

Sua vez: Ache o volume do vaso gerado pela curva $x = e^z$ ao redor do eixo z (Figura 6.5).

Dica: O primeiro passo é desenhar a curva. A curva e uma visão lateral da fatia (um disco) são mostrados na Figura 6.6

Resposta: _____

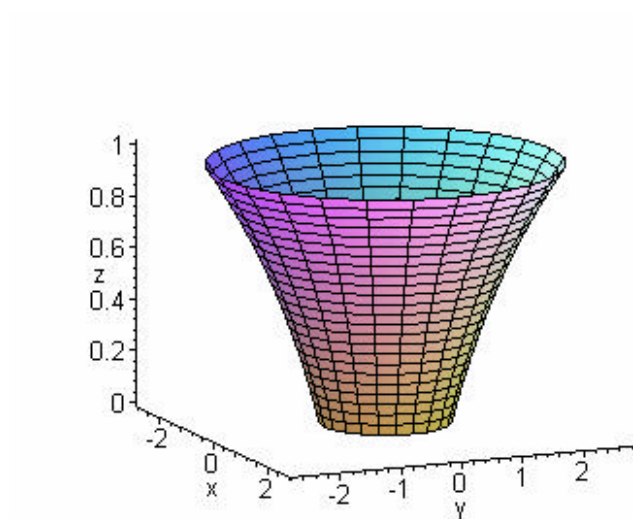


Figura 6.5 O vaso gerado por e^z .

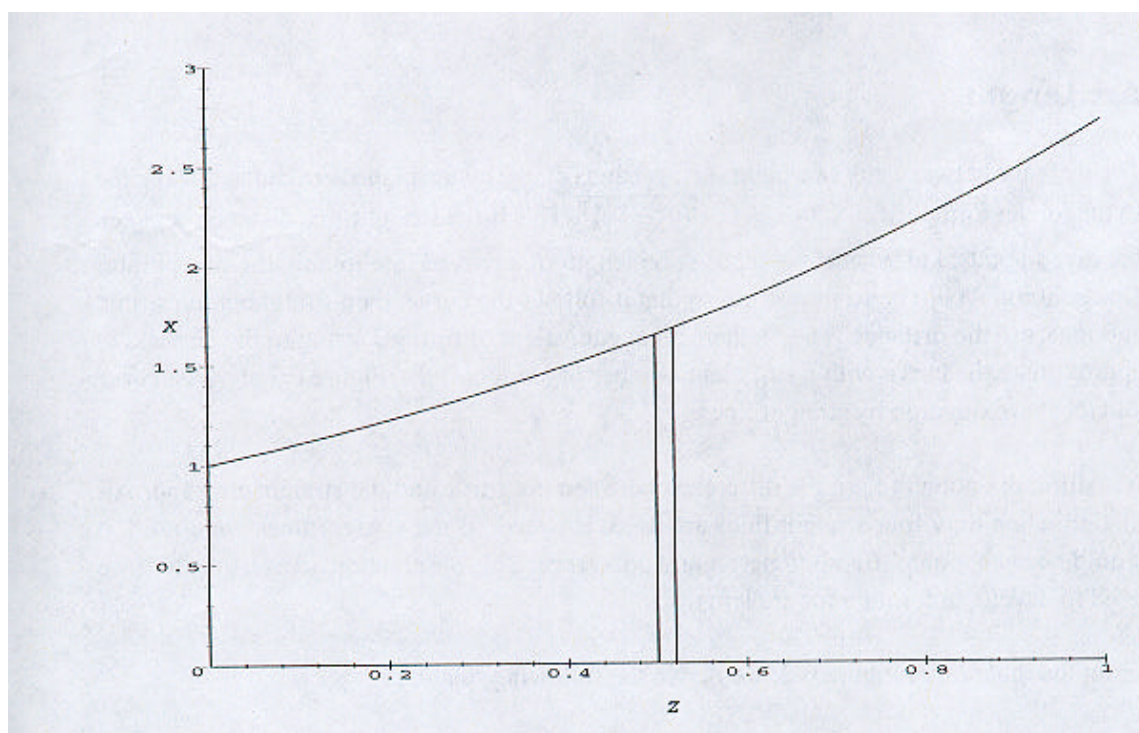


Figura 6.6 A curva que deve girar em torno do eixo x

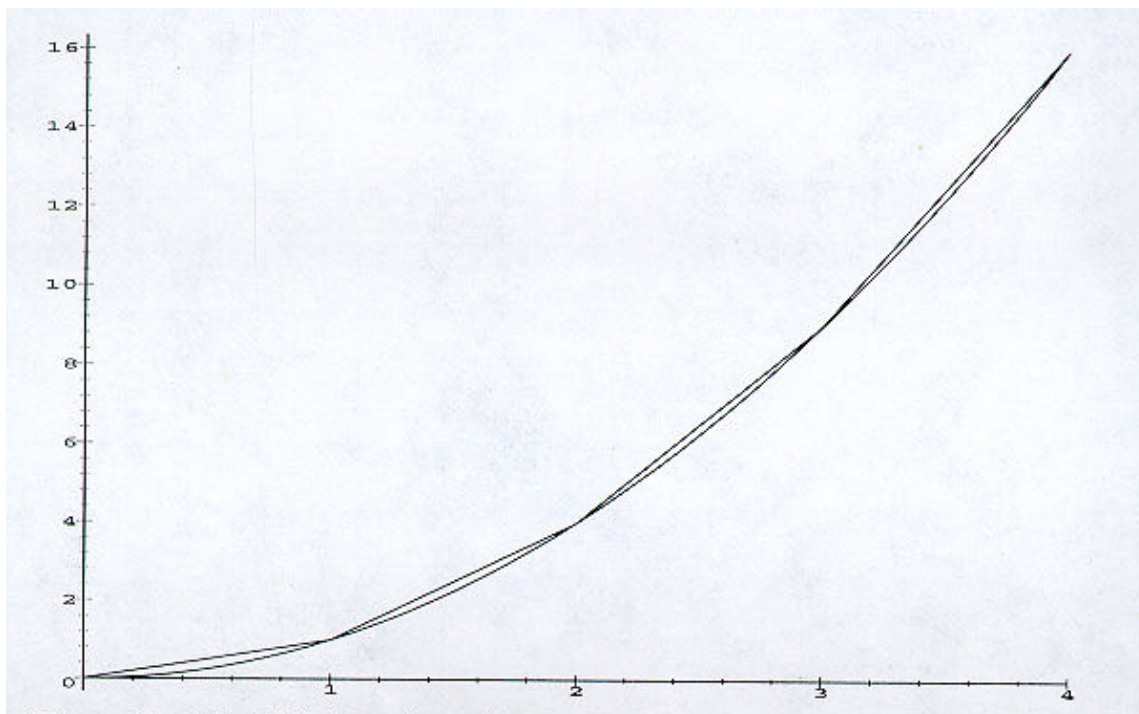


Figura 6.7 A parábola aproximada por quatro linhas retas.

O Comprimento do Arco

A distância entre quais dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) no plano é calculada usando a fórmula De Pitágoras $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Esta é a distância em linha reta entre os dois pontos dados, e se quisermos o comprimento de uma linha curva ligando os dois pontos? Uma solução seria posicionar uma linha ao longo da curva e depois medir a linha. O equivalente matemático para este procedimento é aproximar a curva com um número suficiente de linhas retas. A Figura 6.7 mostra a curva e suas aproximações.

Já é bem difícil perceber a diferença entre a curva e a aproximação das linhas retas e quando apenas quatro linhas retas são usadas. Porém, se 10 linhas fossem usadas seria ainda mais difícil perceber a diferença. Esta observação nos indica que temos que desenvolver uma fórmula para o comprimento do arco.

Do diagrama da figura 6-8, nós derivamos as seguintes relações

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

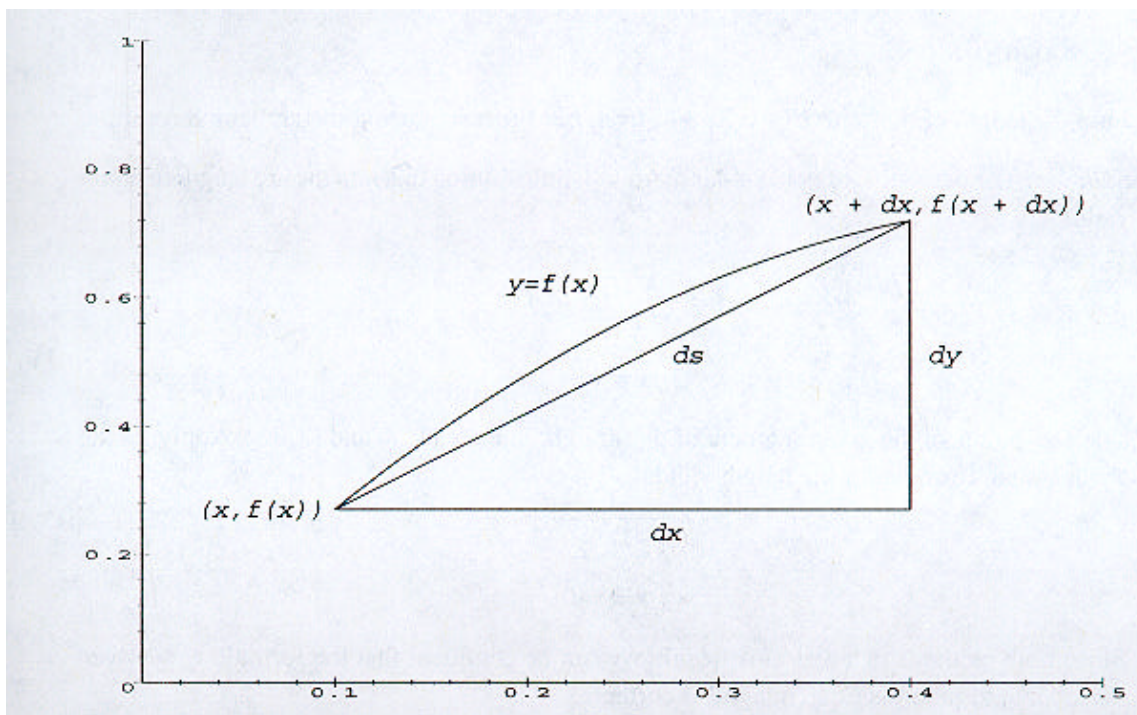


Figura 6.8 Diagrama da derivada da fórmula do comprimento do arco

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6-1)$$

O comprimento do arco tem que ser a integral no lado direito da última equação. Logo a fórmula para o comprimento do arco é

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (6-2)$$

O integrando é complicado pelo fato de conter uma raiz quadrada de 1 mais o quadrado da derivada de $f(x)$. Integrais complicadas como esta podem não ter uma solução em termos de funções elementares. Porém, vamos continuar e ver se conseguimos encontrar os comprimentos de alguma figuras comuns. O primeiro exemplo nesta seção vai testar a fórmula que derivamos aplicando-a a uma linha reta, cujo comprimento pode ser calculado facilmente sem integração.

Exemplo 6-8

Ache o comprimento da curva $y = 3x+4$, de $x = 1$ até $x = 3$, usando a fórmula do comprimento do arco.

Resolução: A derivada de $y = 3x+4$ é $dy/dx = 3$. Substituindo isto na fórmula temos.

$$s = \int_1^3 \sqrt{1+3^2} dx$$

$$s = \sqrt{40}$$

As extremidades do segmento da linha reta são (1, 7) e (3, 13). Aplicando a fórmula Pitagórica para o comprimento temos

$$s = \sqrt{(3-1)^2 + (13-7)^2}$$

$$s = \sqrt{40}$$

Já que ambos os métodos dão o mesmo resultado, podemos ter certeza que a fórmula que derivamos para o comprimento do arco em termos de uma integral está correta.

Sua vez: Ache o comprimento da curva $x = 3y+4$, de $y = 1$ até $y = 3$, usando a fórmula do comprimento do arco.

Dica: Usando a Figura 6.8 você pode derivar a fórmula envolvendo dx/dy e integrar em relação a y . Ou, você pode resolver a equação por y e determinar os valores de x nas extremidades.

Resposta: _____

Exemplo 6-9

Demonstre que a fórmula para o comprimento do arco encontra corretamente o comprimento de uma linha reta qualquer.

Resolução: A equação para a linha reta em geral pode ser dada assim.

$$Y = mx+b$$

A inclinação é $dy/dx = m$. Substituindo para a fórmula em questão.

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+m^2} dx \quad (6-3)$$

Você não precisa do Maple para realizar esta integração! O termo em raiz quadrada é uma constante e pode ser fatorada fora do radical. A integral de dx é x . Porque? A integral é a mesma que

$\int 1 dx$, e a antiderivada de 1 é x . Logo, o comprimento da linha entre as duas extremidades dadas por x_1 e x_2 é

$$s = \sqrt{1 + m^2} (x_2 - x_1) \quad (6-4)$$

Aplicando a fórmula Pitagórica, temos

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2 (x_2 - x_1)^2} \quad (6-5)$$

Fatorando o termo comum fora do radical temos

$$s = (x_2 - x_1) \sqrt{1 + m^2} \quad (6-6)$$

Logo o cálculo usando a fórmula integral produz o mesmo resultado.

O cálculo com a fórmula integral produz o mesmo resultado que a fórmula De Pitágoras.

Sua vez: Uma linha reta é definida pela equação $y = 3x - 3$. Ache o comprimento do segmento da linha entre $x = -2$ e $x = 3$.

Resposta: _____

Exemplo 6-10

Ache o comprimento de $y = x + \sin(x)/100$ de $x = 0$ até $x = 2\pi$. Compare este comprimento com o da distância em linha reta entre as duas extremidades da curva. (Figura 6.9).

Resolução: Desenhe a curva para ver se é próxima a uma linha reta.

`>plot(x = sin(x)/100, x = 0 .. 2*Pi);`

A curva parece quase reta. Podemos facilmente calcular o seu comprimento aproximado concluindo que uma linha reta é dada por $x = y$. O comprimento do segmento de linha é $2\sqrt{2}p$, que é aproximadamente 8.8858.

Mostraremos uma abordagem passo a passo, para a resolução usando a fórmula de comprimento do arco.

1. Ache dy/dx , que é necessário para esta fórmula.
2. Forme a integral para o comprimento do arco.

3. Se o Maple não puder fazer a integral, use `evalf(Int(...))`. Este comando calcula a aproximação numérica da integral
4. Compare a resposta a uma estimativa do comprimento que você obtenha de outras maneiras.

Aplicando estes passos a este problema obtemos

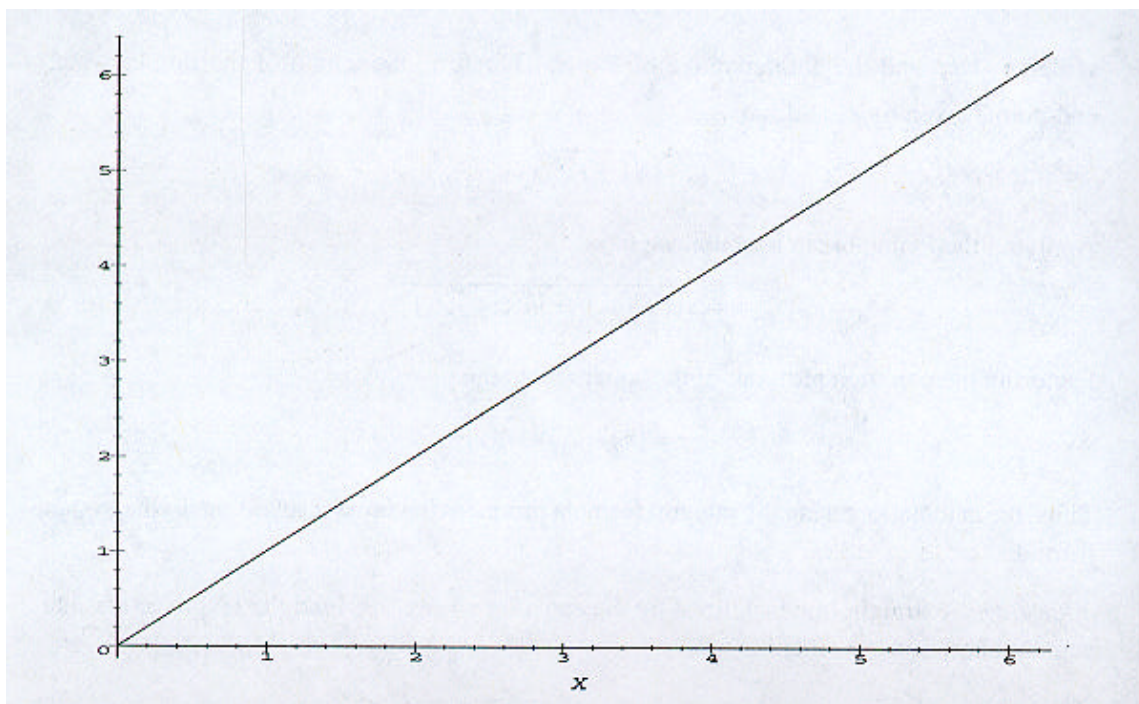


Figura 6.9 O gráfico mostrando que $x + \sin(x)/100$ parece uma linha reta.

```
>yp := diff(x + sin(x)/100, x);
```

$$yp := 1 + \frac{1}{100} \cos(x)$$

```
>s = int(sqrt(1+yp^2), x = 0 .. 2*Pi); ( esteja pronto para esperar!)
```

O Maple demora um longo tempo para resolver esta integral. A resposta possui grande números inteiro, funções estranhas (*EllipticPi*, *EllipticF*, *EllipticE*). Para propósitos práticos, a resposta é inútil. É quase equivalente a não ter nenhuma resposta. Considerando que o seu objetivo é ter uma resposta numérica, de qualquer forma vamos emitir o comando para a integração numérica:

```
>evalf(Int(sqrt(1+yp^2), x = 0 .. Pi));
```

8.885821413

O Maple só leva uma fração de segundos para computar, confirma nossa estimativa.

Sua vez: Compute o comprimento da curva dada pela equação $y = x + \sin(100x)/100$. Primeiramente faça uma estimativa. Qual a diferença na curva que oscila 1000 vezes mais rápido que a do exemplo 6-10? Qual a sua estimativa para o comprimento da curva $y = x + \sin(kx)/100$ a medida em k cresce?

Resposta: _____

A razão de uma circunferência ao seu diâmetro é uma constante, seja lá qual for o tamanho estipulado. Vejamos como esta constante pode ser computada usando a fórmula do comprimento do arco. Gostaríamos de verificar que $C = \pi D$, onde C é a circunferência do círculo de diâmetro D . Já que o raio do círculo é metade do seu diâmetro, a fórmula é equivalente a $C = 2\pi r$. Qualquer ponto na circunferência do círculo de raio r , centrado na origem, obedece a relação $x^2 + y^2 = r^2$. Logo, a equação para parte da circunferência no primeiro quadrante é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Já que os eixos $x - y$ dividem o círculo em quatro porções iguais, o comprimento da curva é um quarto da circunferência completa. Podemos calcular o comprimento desta parte da mesma forma que fizemos no exemplo anterior.

>y := sqrt(r^2 - x^2);

$$y := \sqrt{r^2 - x^2}$$

>yp := diff(y, x);

$$yp := -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

s := int(sqrt(1 + yp^2), x = 0 .. r);

$$s := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{r} \sqrt{\frac{1}{r} \left(\ln \left(-\frac{1}{r^2} \right) + 2 \ln(r) \right)}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2}}}$$

P Maple dá uma resultado aparentemente complicado, provavelmente é possível realizar uma simplificação. A expressão de s contém raiz quadrada, logo devemos concluir que o Maple vai relutar em tirar raízes quadradas até que saiba que r é um número positivo real. Poderíamos informar o Maple deste fato, ou tentar esta versão do comando *simplify*:

>q := simplify(s, symbolic);

$$q := \frac{1}{2} r \pi$$

O comando *simplify* fez um bom trabalho. Visto que q é um quarto da circunferência., e a circunferência completa é

>C = 4*q;

$$C = 2r\pi$$

Nós derivamos o comprimento da circunferência de um círculo usando a fórmula do comprimento do arco. Motivados por esta conquista, vamos tentar a mesma mesma operação para comprimento de uma elipse.

A elipse é descrita pela relação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. A elipse corta o eixo x em a e o eixo y em b.

A elipse é simétrica em relação a ambos eixos, então mais uma vez, a parte da curva no primeiro quadrante é um quarto da curva completa. Resolvendo para y, a expressão da curva no primeiro quadrante é

Y := b*sqrt(1-x^2/a^2);

$$y := b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Seguindo os passos para o cálculo do comprimento do arco mais uma vez, temos

>yp := diff(y, x);

$$yp := -\frac{bx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

s := int(sqrt(1+yp^2), x = 0 .. a);

$$s := \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^4}} dx$$

Desta vez, o Maple copia a integral sem fazer nenhuma avaliação a mais. O Maple está nos dizendo que precisa de ajuda para calcular esta integral. Na verdade, não existe uma maneira em termos de uma função que nós conhecemos até agora. Uma nova função deve ser inventada (*chamada de integral elíptica*) para representar a resposta deste problema.

Exemplo 6-11

Mesmo que o Maple não seja capaz de achar uma fórmula geral para a circunferência de uma elipse, podemos aproximar esta circunferência se a e b forem números definidos. Que sejam a = 3 e b = 2. Ache a circunferência com a precisão de dez casas decimais.

Resolução; A circunferência desta elipse é dada pelo comando:

`>evalf(subs(a = 3, b = 2, s);`

3.966359897

Sua vez. Ache a circunferência da elipse definida por $a = 99$, $b = 101$, e compare a aquele círculo de raio 100.

Resposta: Área da elipse=_____ Área do círculo=_____

Exercícios de Papel e Lápis

PP6-1

Na seção “Movimento sob uma força aplicada”, as fórmulas básicas do movimento no caso de uma aceleração constante foram dadas. Elas são $s = \frac{1}{2} at^2$ e $v = at$. Este problema pede para que você desenvolva mais fórmulas gerais para o caso da aceleração constante.

(a) Se um objeto for submetido a uma aceleração constante, seu gráfico velocidade tempo é uma linha reta. Use este fato para provar que a distância percorrida é o produto da velocidade média multiplicado pelo tempo. Que a velocidade inicial seja V_0 e a velocidade final V_f . Desenhe o gráfico de velocidade – tempo.

Resposta:_____

(b) Calcule a área abaixo deste gráfico usando a fórmula da área de um trapézio, ou subdividindo o gráfico em um triângulo e um retângulo e somando as duas áreas.

Resposta:_____

(c) A expressão para a velocidade média aparece na resposta para (b)?

Resposta:_____

(d) Afirme a fórmula geral para a velocidade como função do tempo. Use V_0 para a velocidade inicial e V_f para a velocidade final.

Resposta:_____

(e) Ache a fórmula geral para a distância como uma função de tempo. Pare obter a resposta você deve integrar sua resposta para (d) e adicionar a constante de integração. Use s_0 como símbolo do deslocamento inicial.

Resposta: _____

(f) Derive a fórmula que relaciona a distância s à velocidade inicial V_0 a velocidade final V_f , e a aceleração, ^a Comece com a fórmula para s em termos de V_0 , V_f , e t ; Ou seja, com a fórmula que você derivou em (b). Elimine t usando (d). Expresse seu resultado de forma que não contenha frações.

Resposta: _____

PP6-2

A aceleração de um automóvel não é constante. Que aceleração seja dada por

$$a(t) = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{40}t^2 - \frac{1}{80}t^3 \right)g, \text{ onde } g \text{ é a aceleração devida a gravidade } (g = 9.8\text{m/s}^2).$$

(a) Ache a velocidade em $t = 1$ se $v(0) = 0$.

Resposta: _____

(b) Ache a distância percorrida entre 0 e 4s se $s(0) = 0$.

Resposta: _____

Maple Lab

Cada um dos exemplos deste laboratório estão relacionado a um tópico em particular escolhidos de varias disciplinas. Esperamos que realize todos os exercícios, até aqueles que não despertem grande interesse de sua parte. Todos estão relacionados à integração, mas a integral em particular não é dada no enunciado. A necessidade para a integração aparece na análise do problema.

O material deste laboratório continua a exploração de como integração pode ser aplicada em problemas práticos. Sua tarefa é seguir junto com o exemplo suprimindo os passos que estiverem faltando, e computar os resultados.

ML6-1: Volumes por Integração

Veja a seção de volumes por integração no inicio do capitulo. Desta vez, será pedido para que calcule o volume de um estádio. A circunferência do estádio é

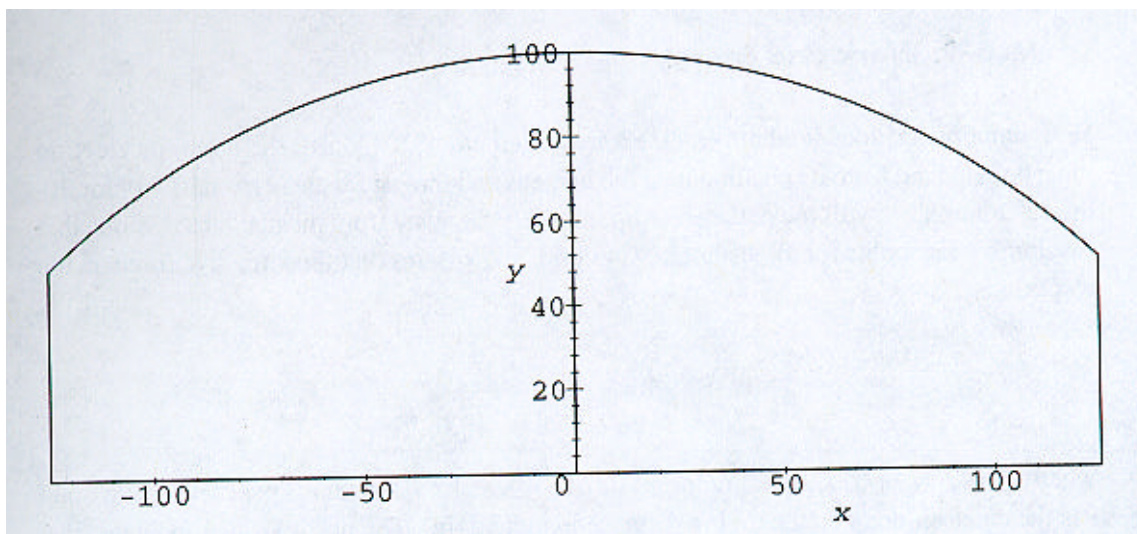


Figura 6.10 Um estádio coberto

é uma parede cilíndrica de 50 pés de altura. A cúpula é na forma de uma tampa esférica, que é formada pela curva

$$z = -\frac{325}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{525625 - 16x^2}$$

em torno do eixo z . O formato do estádio é mostrado na figura 6.10.

(a) derive a equação da cúpula, que está na forma de uma tampa esférica passando pelos pontos $(0, 100)$ e $(125, 50)$ e tendo um raio de 725 pés. Use o Maple! Escreva o comando solve aqui.

Resposta: _____

(b) Ache o volume total do estádio pelo método de cilíndric Shell.

Resposta: Comando do Maple: _____; Volume: _____

(c) Ache o volume total do estádio pelo método de discos. Confirme se obteve a mesma resposta de (b). Para aplicar o método de discos, você deve separar o cálculo em duas partes. O estádio é visualizado como um cilindro de base de raio de 125 pés e altura 50 pés, mais a tampa esférica. Aplique a fórmula de volume de um cilindro a primeira parte e ache x em função da altura z . (Na verdade, você precisa de x^2 , já que o volume do disco é $2\pi x^2$).

Resposta: _____

ML6-2: Trabalho e Energia

Quanto trabalho é necessário para ionizar um átomo de hidrogênio? Para ionizar o átomo seu elétron tem que ser deslocado de sua posição perto do núcleo e movido para longe dele. Aceite que a lei Coulomb se aplica a todas as distâncias. Ela diz que a força de atração de um elétron é

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Onde $q_1 = q_2 = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulombs (C), $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ farads por metro (F/m), e r é a distância que separa o elétron e o núcleo em metros (m). O sinal negativo indica que a força, F , em newtons (n), é de atração entre as duas partículas.

(a) Calcule o trabalho realizado em mover o elétron de sua menor órbita, onde 5×10^{-11} m de distancia do núcleo, para um ponto infinitamente afastado.

Resposta: _____

(b) Converta a resposta para eletro – volts dividindo a resposta em (a) por 1.602×10^{-19} . (esta unidade de energia é mais apropriada para o mundo microscópico.)

Resposta: _____

ML6-3: Centro de Massa, Centróides, e Momentos de Inércia

A noção de centro de massa (CM) aparece da ciência da mecânica. É efetivamente o ponto de equilíbrio de um objeto. Se um objeto for suspenso em seu CM, não vai tender a girar em torno deste ponto. Considere o caso de uma leve régua com três pesos afixados. Os pesos são 2kg, 5kg e 3kg e estão presos em 15cm, 25cm e 35cm, respectivamente (Figura 6.11).

Se um fio for amarrado na régua em seu CM, ficará pendurada suspensa sem tender. Se o fio for amarrado a qualquer outro ponto, a régua irá girar, pois um lado será mais pesado que o outro. Para encontrar o CM, escolha qualquer ponto como um local possível para amarrar o fio: Escolheremos o lado esquerdo da régua, como $x = 0$. O efeito do giro de uma massa é definido como o produto da massa e da distância do ponto escolhido. Um teorema da mecânica diz que a soma dos efeitos do giro de todas as três massas é igual ao produto de CM e a massa total. Logo CM é achado usando o comando

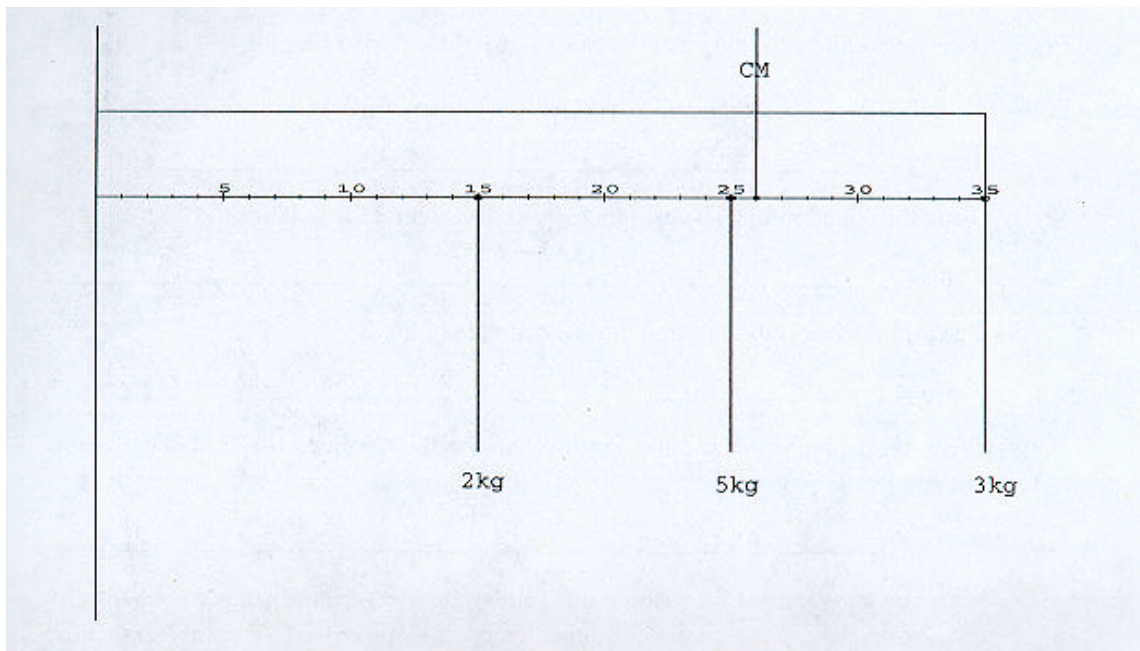


Figura 6.11 Pesos pendurados na régua

```
>solve(15*2+25*5+35*3 = x*10, x);
```

26

O centro de massa é em $x = 26$ cm. Esta forma pode ser generalizada para incluir forma bidimensionais. O princípio é o mesmo, some os efeitos do giro e equacione com ao produto de CM e a massa total. Aqui está a fórmula para a coordenada x do centro de massa:

```
>solve(Int(x*y(x), x) = CM*Int(y(x), x), {CM});
```

$$\left\{ CM = \frac{\int xy(x)dx}{\int y(x)dx} \right\}$$

Veja que tivemos que usar $y(x)$ ao invés de apenas y na linha de comando do Maple. Se tivéssemos usado y , o Maple o trataria como uma constante, que seria fatorada fora do sinal de integral tanto no numerador quanto no denominador. Tente usando y e observe o resultado. Com certeza não é a forma correta para o centro de massa.

(a) Ache a coordenada x do centro de massa (cm) do triângulo 3, 4, 5 (Figura 6.12).

(i) Escreva a equação para a hipotenusa e determine o domínio de x .

Resposta: _____

(ii) Usando a equação em (i), substitua por y na fórmula integral para CM.

Resposta: _____

(iii) Realize a integração para achar a coordenada x de CM.

Resposta: _____

(iv) Escreva a equação para a linha diagonal que une a origem ao lado de comprimento 4. Especifique o domínio para x .

Resposta: _____

(v) Escreva a equação para a linha diagonal que une o topo do triângulo em (3, 4) a sua base, que se encontra no eixo x . Usando a fórmula que achar mais conveniente determina o domínio de x .

Resposta: _____

(vi) Encontre o ponto de interseção das diagonais a coordenada x é a mesma coordenada x para CM?

Resposta: _____

(b) Ache a coordenada x do centro de massa do triângulo definido pelas coordenadas (0,0), (10, 0) e (10, 8) (Figura 6.13).

(i) Escreva a equação para o maior lado e determine o domínio de x .

Resposta: _____

(ii) Usando a equação em (i), substitua por y na fórmula integral de CM.

Resposta: _____

(iii) Realize a integração para achar a coordenada x de CM.

Resposta: _____

(iv) Escreva a equação para a linha diagonal que une a origem ao lado de comprimento 4. Especifique o domínio de x .

Resposta: _____

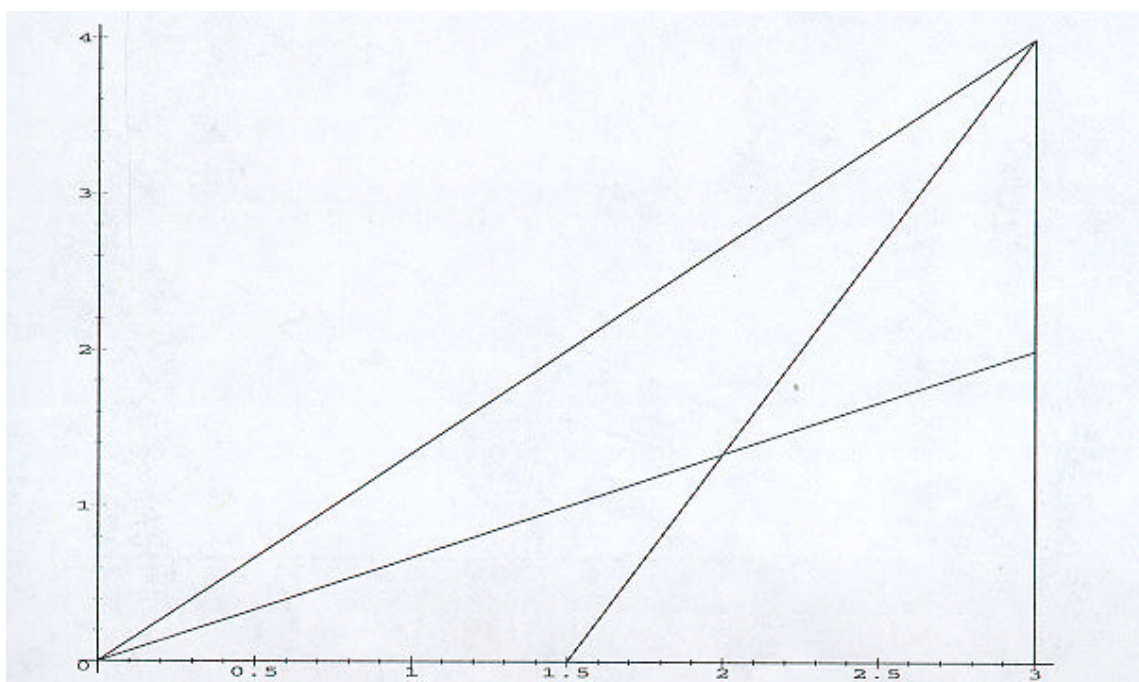


Figura 6.12 O triângulo 3, 4, 5 e as duas diagonais

(v) Escreva a equação para a diagonal unindo o topo do triângulo em (3, 4) a sua base, que está posicionada no eixo x. Usando a fórmula que achar mais conveniente determina o domínio de x.

Resposta: _____

(vi) Encontre o ponto de interseção das diagonais a coordenada x é a mesma coordenada x para CM?

Resposta: _____

(c) Ache o CM da figura delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ e $x = 1$. Para este problema ache os valores das coordenadas x e y. Veja que CM_y é dado pela fórmula

$$CM_y = \frac{\int yx(y)dy}{\int x(y)dy}$$

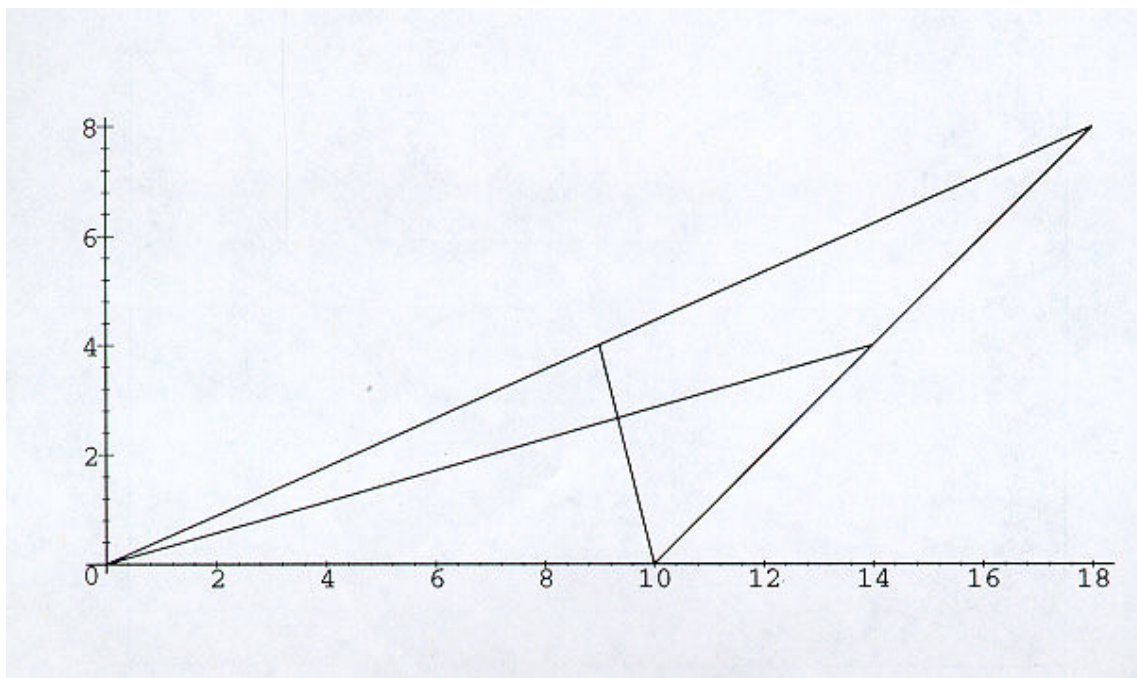


Figura 6.13 O Triângulo (0,0), (10, 0), (18, 8) e as duas diagonais.

Porém você deveria examinar a simetria do problema para ver se você pode evitar a integrações para achar CM_y .

Resposta: _____

ML6-4: A Raiz de Uma Função Trigonométrica

Engenheiros eletricitas são ensinados a calcular a teoria de correntes alternada (CA) dividindo o valor máximo da CA pela raiz quadrada de dois. Esse problema sugere justificar esta prática.

Definições:

1. Uma CA e dada por $i(t) = i_m \sin(wt)$ onde $i(t)$ é a corrente a qualquer momento, t . E i_m é o valor máximo da corrente.
2. A lei de Ohm para resistores ($V = Ri$) permanece mesmo se a corrente através da resistores for CA.
3. A energia dissipada em resistor é $P = Ri^2$, sendo a corrente direta ou alternada usada.

Uma consequência destas definições é que a energia instantânea dissipada pelo resistor é $P(t) = Ri(t)^2$. A energia dissipada pelo resistor é Pt se a corrente direta for envolvida. No caso da corrente alternada, a energia instantânea deve ser integrada: $E = \int P(t)dt$, onde a integral é tirada no intervalo de tempo durante o qual a energia deve ser calculada.

(a)Escreva a fórmula para a energia dissipada durante o tempo dt em um resistor sob condições CA como função da corrente instantânea.

Resposta:_____

(b)Que seja $t = 2\pi / \omega$. Mostre que este tempo representa um ciclo completo da corrente CA.

Resposta:_____

(c)Integre a fórmula que você desenvolveu em (a) de $t = 0$ até $t = 2\pi / \omega$ para achar a energia dissipada total de um ciclo.

Resposta:_____

(d)Sua resposta em (c) é a energia dissipada media em um ciclo. Compare a resposta a $P_{2\pi / \omega}$, a energia dissipada na mesma quantidade de tempo mas por uma corrente DC. Que relação emerge?

Resposta:_____

Seu trabalho deve leva-lo à conclusão que você pode usar esta fórmula para CA, desde que escolha uma corrente CA efetiva (e voltagem) para ser o valor Máximo dividido pela raiz quadrada de dois.

ML6-5: Curvas de fornecimento Curvas de Demanda

Em economia a Curva de Demanda, $D(x)$, determina o preço que um consumidor está disposto a pagar por um número x de unidades de uma mercadoria. Todos nós sabemos que insistimos em pagar menos por unidade quando compramos em quantidade, então $D(x)$ é uma fração decrescente de x . A Curva de fornecimento $S(x)$ dá o preço por unidade que está disposto a vender as unidades S .

O equilíbrio econômico é alcançado no ponto de interseção (x_E, P_E) , destas duas curvas, onde x_E é o número de unidades e P_E é o preço de cada unidade em dólares.

O saldo do consumidor é definido como $\int_0^{x_E} D(x)dx - x_E P_E$, e o saldo do fornecedor é definido como $x_E P_E - \int_0^{x_E} S(x)dx$.

Dado $D(x) = (x-64)^2$ e $s(x) = 10(1+\ln(x+1))$,

(a) Encontre (x_E, P_E) .

Resposta:_____

(b) Calcule o saldo do Consumidor.

Resposta:_____

(c) Calcule o saldo do fornecedor.

Resposta:_____

ML6-6: Crescimento Exponencial

Um estatístico diz que o número de cientistas nascidos no ano t , da antiguidade aos dias de hoje, é dado pela fórmula $S(t) = S_0 e^{kt}$.

(a) Considerando que tenha nascido um cientista a cada 10 anos no início de nossa era, ou seja no ano 0 dc. Mais a frente considere que tenham nascido 1000 cientistas no ano 1900. Determine as constantes S_0 e k destas informações.

Resposta:_____

(b) Digamos que todos os cientistas vivam 70 anos. Use a integração para aproximar todos os cientistas vivos no mundo no ano 2000.

Resposta:_____

(c) Compare este número com todos os cientistas que já existiram. (Use integração novamente) Qual porcentagem de todos os cientistas que já existiram que estão vivos no ano 2000?

Resposta:_____

ML6-7: Depredação de Recursos Naturais

A aplicação mais realística da mesma fórmula de crescimento exponencial do ML6-6 é o uso humano dos recursos naturais, como a quantidade de uma determinada espécie de peixe no oceano. Devido a expansão da população mundial, a quantidade de recursos naturais, como o peixe, sendo pescado em um tempo dt pode ser estimada pela expressão $F_0 e^{kt} dt$, onde F_0 e k devem ser determinados. Sendo t em anos.

(a) Escreva uma fórmula integral para a quantidade total de peixes pescados durante o intervalo $0 \dots T$.

(b) Digamos que um milhão de exemplares deste peixe tenham sido pescados em 1960, logo $F_0 = 10^6$ e a razão de crescimento da atividade pesqueira é mais ou menos 20% ao ano, $k = 0.2$. Existem

um bilhão (10^9) deste peixe no oceano. Estime o tempo para que esta espécie seja extinta.

(i) considerando que nenhum peixe tenha nascido desde 1960. Resposta: _____

(ii) Considerando que a população se reproduza rapidamente de forma que sempre haja 10^9 até que uma catástrofe aconteça, de forma que todos os peixes sejam pegos no mesmo ano!

Resposta: _____

ML6-8: Anuidades: Quanto Vale a Sua Casa?

Quanto vale a sua casa? Economistas dizem que o valor capital de uma propriedade alugada durante T anos é aproximado por $At = \int_0^T R e^{-Kt} dt$ onde R é o valor anual e K é taxa de juros continua. O valor da casa pode ser estimado determinando por quanto a casa pode ser alugada, que estamos chamando de R neste problema, deixando que T fique bem grande próximo ao infinito. Derive a relação para o valor capital avaliando a integral deste caso. Considerando que R e K permaneçam iguais ao longo dos anos.

Resposta: _____

ML6-9 Pressão Hidrostática

A pressão, p, em pascais, de um fluido de profundidade h é dada por $p = dgh$, onde d é a densidade do líquido em Kg/m^3 e g 9.8m/s^2

(a) Um fluido incompressível, como água, tem essencialmente a mesma densidade a qualquer profundidade. Ache a profundidade iguala a pressão atmosférica ao nível do mar, que é 14.7lb/in^2 . Você tem que converter para pascais para fazer a parte (b) então faça esta conversão agora.

Resposta: _____

(b) Ache a força total nos lados do tanque em ML4-8 (Figura 4.13) se $h = 10\text{m}$, $\theta = 45^\circ$, e o tanque está cheio com água de densidade $d = 1000\text{kg/m}^3$. Já que a pressão é definida como força por unidade de área, calcule a área dA do lado de uma fatia de água de altura dh e profundidade h, e então use $p(h) = \frac{dF}{dA}$ integre para achar a força total.

Resposta: _____

ML6-10: Probabilidade

Na teoria da probabilidade, a derivada padrão, s , de uma distribuição de probabilidade contínua $f(x)$, é definida como $\int_a^b (x-m)^2 f(x) dx$, onde $m = \int_a^b x f(x) dx$ é o meio de distribuição. O significado de $f(x)$ é que a probabilidade de um resultado positivo no intervalo dx é $f(x)dx$. Se a densidade da probabilidade $f(x)$ é uma constante, então todas as respostas são igualmente prováveis.

Digamos que a probabilidade de encontrar um carro numa estrada entre os marcadores de distância a e b sendo $f(x) = \frac{1}{b-a}$, onde $b = 20$ milhas e $a = 10$ milhas.

(a) Calcule o meio de probabilidade de distribuição

Resposta: _____

(b) Calcule a distribuição padrão.

Resposta: _____

(c) Mude a distribuição de probabilidade para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{\left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}$ e recalcule meio de derivada padrão. Qual a mudança no meio de derivada padrão no primeiro caso?

Resposta: _____

ML6-11: Calor Específico

A maioria das substâncias tem um calor específico constante em temperatura ambiente. Logo a energia necessária para aumentar a temperatura de uma dada quantidade de substância é $Q = C\Delta T$, onde Q é a quantidade de energia necessária em Joules, C é o calor específico para a determinada quantidade da substância ($C = mc$), e ΔT é a variação de temperatura. Uma das dificuldades de produzir temperaturas muito baixas é o fato de que o calor específico das substâncias diminui muito rápido a medida em que a temperatura se aproxima do zero absoluto, que faz com que qualquer mínima inserção de energia criar um salto na temperatura. Na parte (a) deste problema você vai calcular a energia para aquecer um material quando a temperatura está próxima do zero absoluto.

(a) O calor específico de uma determinada quantidade de cloreto de potássio é dada pela fórmula $C = 0.16T^3$ mJ/K, $0 < T \leq 4.5$, onde K é a escala Kelvin. Zero da escala é o zero absoluto. A temperatura de um quarto agradável é por volta de 300K.

A unidade mJ quer dizer milijoules, ou 10^{-3} Joules. Quanta energia é necessária para elevar a temperatura da amostra de cloreto de potássio de 1K para 3K?

(b) Einstein sugeriu que uma fórmula possível para o calor específico de uma substância é

$$C(T) = \frac{200 \left(\frac{10}{T} \right)^2 e^{\frac{10}{T}}}{\left(e^{\frac{10}{T}} - 1 \right)^2}, \text{ com } T \text{ em graus Kelvin.}$$

(i) Plote $C(T)$ para $T = 0 \dots 300$. Desenhe o gráfico aqui.

(ii) Ache a quantidade de energia necessária para elevar a temperatura desta substância de 4K para 300K.

Resposta: _____

ML6-12: A Área Entre Duas Curvas

Ache a área entre os arcos duplos definidos pelas equações $y = 16 - x^2$ e $y = 14 - x^2$. A área em questão é formada pelas partes positivas destas equações e o eixo x (Figura 6.14)

Resposta: _____

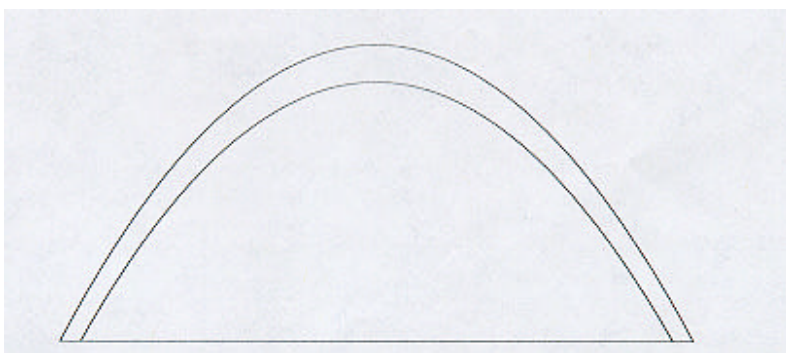


Figura 6.14 Diagrama de ML6-12